図形の性質　演習題

13

解法例 1

AB//EF　・・・①，FD//BE より，四角形 DBEF は平行四辺形である。

よって，DB＝EF　・・・②

D は AB の中点だから，DB＝AD　・・・③

①～③より，四角形 ADEF は平行四辺形である。

したがって，平行四辺形 ADEF の対角線の交点を P とすると，

平行四辺形の性質より，DP＝PE　・・・④　PE＝$\frac{1}{2}$AE　・・・⑤

④より，CP は△CFD の頂点 C から辺 FD に引いた中線である。　・・・⑥

また，条件より，CE＝AE であることと⑤より，CE : EP＝2 : 1　・・・⑦

よって，⑥，⑦より，E は，中線 CP を 2 : 1 に内分する点だから，△CFD の重心である。

解法例 2

△PDA と△PFE において，DF//BE，AD＝DB より，AP＝PE　・・・①

∠DPA＝∠FPE（対頂角）　・・・②

AB//FE より，∠PAD＝∠PEF　・・・③

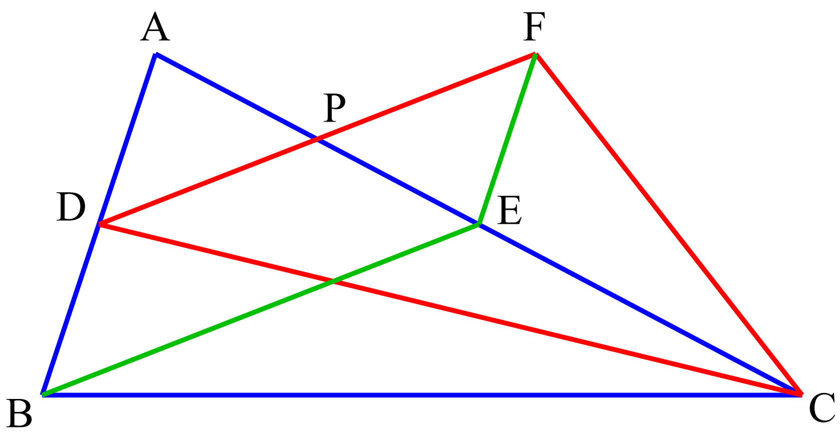
①～③より，1 辺の長さととその両端の角の大きさがそれぞれ等しいから，△PDA≡△PFE

よって，DP＝PE　・・・④　PA＝PE すなわち PE＝$\frac{1}{2}$AE　・・・⑤

④より，CP は△CFD の頂点 C から辺 FD に引いた中線である。　・・・⑥

条件より，CE＝AE であることと⑤より，CE : EP＝2 : 1　・・・⑦

よって，⑥，⑦より，E は，中線 CP を 2 : 1 に内分する点だから，△CFD の重心である。



14

(1)

△ABC において，チェバの定理より，$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$

これと条件より，$\frac{5}{2}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{4}{7}=1$　よって，$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}=\frac{7}{10}$　すなわち BF：FC＝7：10

(2)

△ABF と直線 CD について，メネラウスの定理より，$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}}\cdot\frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{OA}}=1$

これと条件および(1)より，$\frac{5}{2}\cdot\frac{17}{10}\cdot\frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{OA}}=1$

よって，$\frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{OA}}=\frac{4}{17}$　すなわち AO：OF＝17：4

(3)

解法 1

△ABC の面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathrm{OAB}&=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AF}}\cdot\Delta\mathrm{ABF}\\
&=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BC}}S\\
&=\frac{17}{17+4}\cdot\frac{7}{7+10}S\\
&=\frac{7}{21}S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathrm{OBC}&=\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{AF}}S\\
&=\frac{4}{17+4}S\\
&=\frac{4}{21}S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathrm{OCA}&=S-(\Delta\mathrm{OAB}+\Delta\mathrm{OBC})\\
&=S-\left(\frac{7}{21}S+\frac{4}{21}S\right)\\
&=\frac{10}{21}S
\end{aligned}
$$

よって，△OAB：△OBC：△OCA＝7：4：10

解法 2

△ABC の面積を S とすると，

$\Delta\mathrm{OAB}=\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{CD}}S$

ここで，△CAD と直線 BE について，メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OC}}=1$

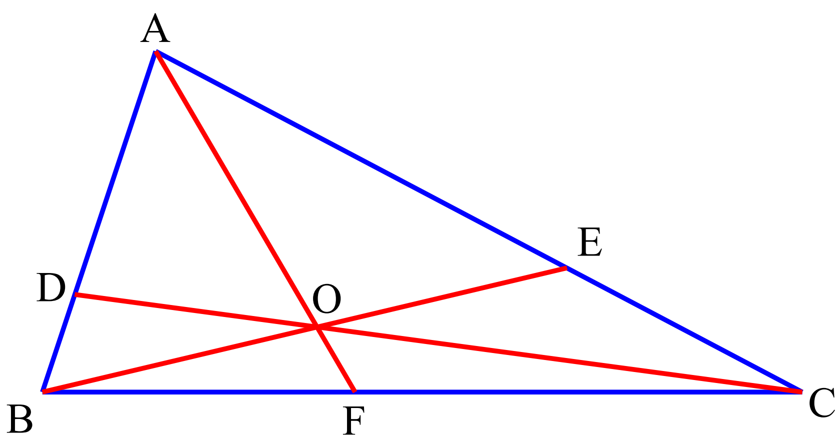
すなわち $\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OC}}=1$　よって，DO：OC＝1：2

ゆえに，$\Delta\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{1+2}S=\dfrac{7}{21}S$

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{OBC}&=\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{AF}}S\\&=\frac{4}{17+4}S\\&=\frac{4}{21}S\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{OCA}&=S-(\Delta\mathrm{OAB}+\Delta\mathrm{OBC})\\&=S-\left(\frac{7}{21}S+\frac{4}{21}S\right)\\&=\frac{10}{21}S\end{aligned}$$

よって，△OAB：△OBC：△OCA＝7：4：10



15

3 つの中線の交点を G とすると，

三角形の存在条件より，

△GAB において， $GA + GB > AB$ ・・・①

△GBC において， $GB + GC > BC$ ・・・②

△GCA において， $GC + GA > CA$ ・・・③

よって，①＋②＋③より， $2(GA + GB + GC) > AB + BC + CA$

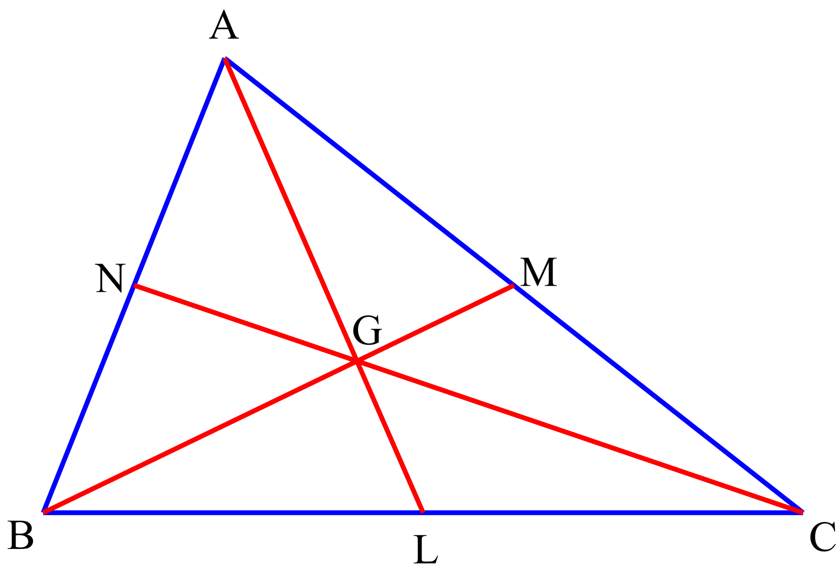
すなわち $GA + GB + GC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ ・・・④

また，G は△ABC の重心だから， $GA = 2GL, GB = 2GM, GC = 2GN$

これらを④に代入し，整理すると， $GL + GM + GN > \frac{1}{4}(AB + BC + CA)$ ・・・⑤

④＋⑤より， $(GA + GL) + (GB + GM) + (GC + GN) > \frac{3}{4}(AB + BC + CA)$

すなわち $AL + BM + CN > \frac{3}{4}(AB + BC + CA)$



16

解法 1

直線 AD と直線 BC の交点を E とする。

△BEA と△BCO において，

∠B が共通　・・・①

AE//OC より，同位角が等しいから，∠BEA＝∠BCO　・・・②

①，②より，対応する角の大きさがそれぞれ等しいから，△BEA∽△BCO

よって，$\dfrac{AE}{OC}=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BA}{BO}$

これと $\dfrac{BA}{BO}=2$， $OC=\dfrac{9}{2}$， $BC=3$ より， $AE=9$　・・・③

$BE=6$　$\therefore CE=BE-BC=3$　・・・④

△CED と△OCB において，

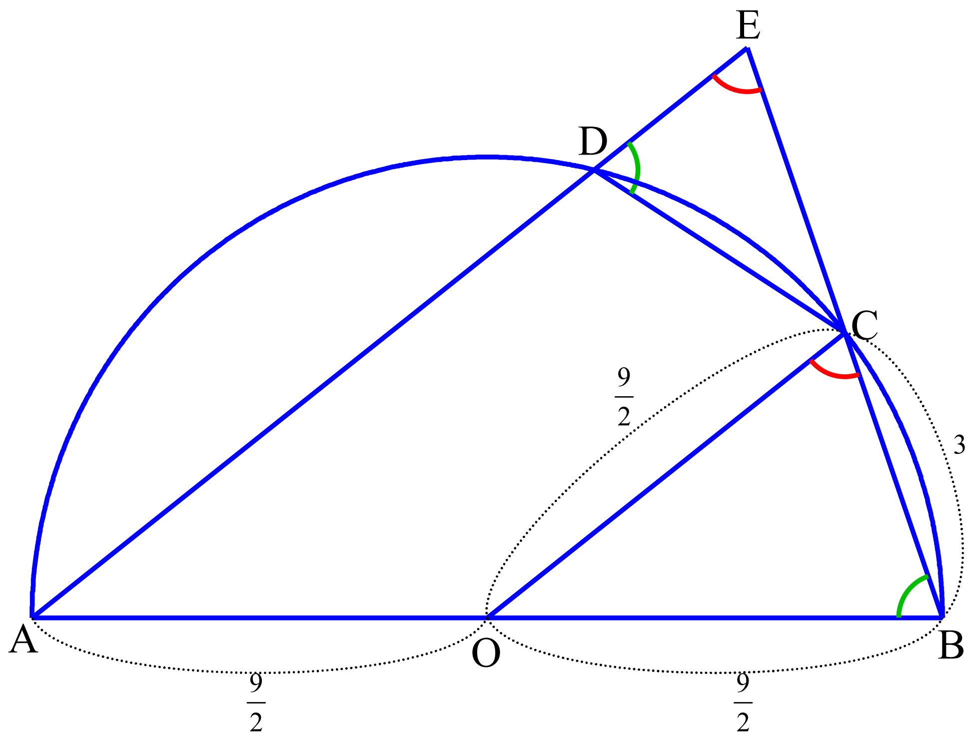
四角形 ABCD は円に内接するから，内接四角形の性質より，∠CDE＝∠OBC

これと②より，対応する角の大きさがそれぞれ等しいから，△CED∽△OCB

よって，$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{CE}{OC}$

これと， $BC=3$， $OC=\dfrac{9}{2}$， $CE=3$ （④）より， $DE=BC\times\dfrac{CE}{OC}=3\times\dfrac{3}{\frac{9}{2}}=2$　・・・⑤

③，⑤より， $AD=AE-DE=9-2=7$



解法 2

OC と BD の交点を E とする。

直径の円周角より，∠ADB＝90°

これと AD//OC より，∠OEB＝∠ADB＝90°

よって，直角三角形 BOE および直角三角形 BCE において，三平方の定理より，

それぞれ

$$BE^2 = OB^2 - OE^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - OE^2 = \frac{81}{4} - OE^2$$

$$BE^2 = BC^2 - CE^2 = 3^2 - (OC - OE)^2 = 9 - \left(\frac{9}{2} - OE\right)^2 = 9 - \frac{81}{4} + 9OE - OE^2$$

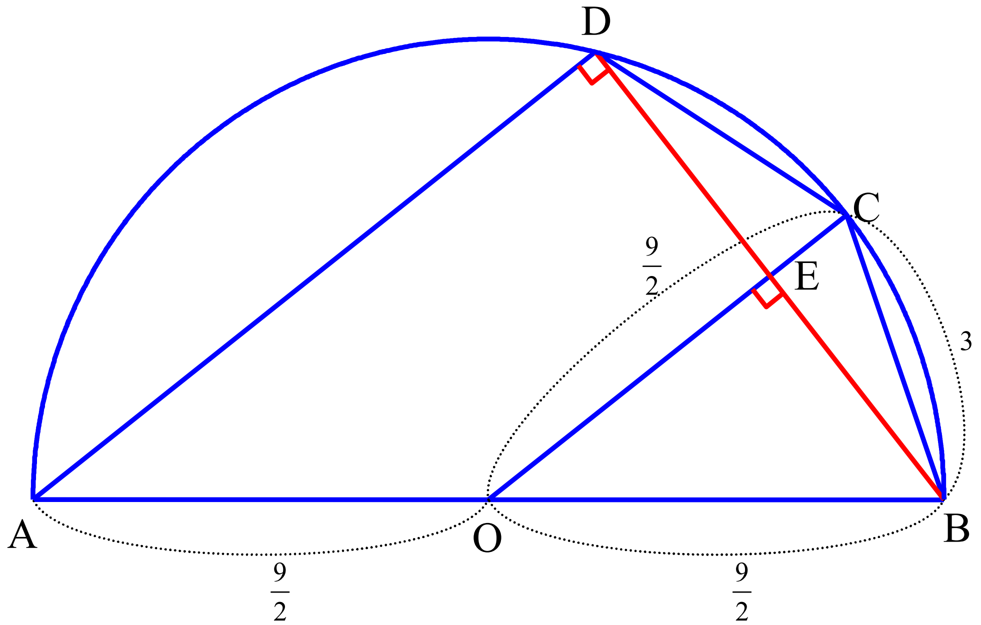
だから，$\frac{81}{4} - OE^2 = 9 - \frac{81}{4} + 9OE - OE^2$ より，$OE = \frac{7}{2}$　・・・①

直角三角形 BAD と直角三角形 BOE において，

直角でない角∠ABD と∠OBE が等しいから，△BAD∽△BOE

よって，$\frac{AD}{OE} = \frac{BA}{BO}$

これと $\frac{BA}{BO} = 2$ および①より，$AD = OE \times \frac{BA}{BO} = \frac{7}{2} \times 2 = 7$



18

(1)

△CKH において，

FH//CK かつ FH⊥直線 HE より，CK⊥直線 HE　・・・①

H は△ABC の垂心だから，直線 BH⊥直線 CA　すなわち KH⊥直線 CA　・・・②

①，②および E は直線 HE と直線 CA の交点であることから，E は△CKH の垂心である。

よって，直線 KE⊥直線 CH　・・・③

また，H は△ABC の垂心だから，直線 AB⊥直線 CH　・・・④

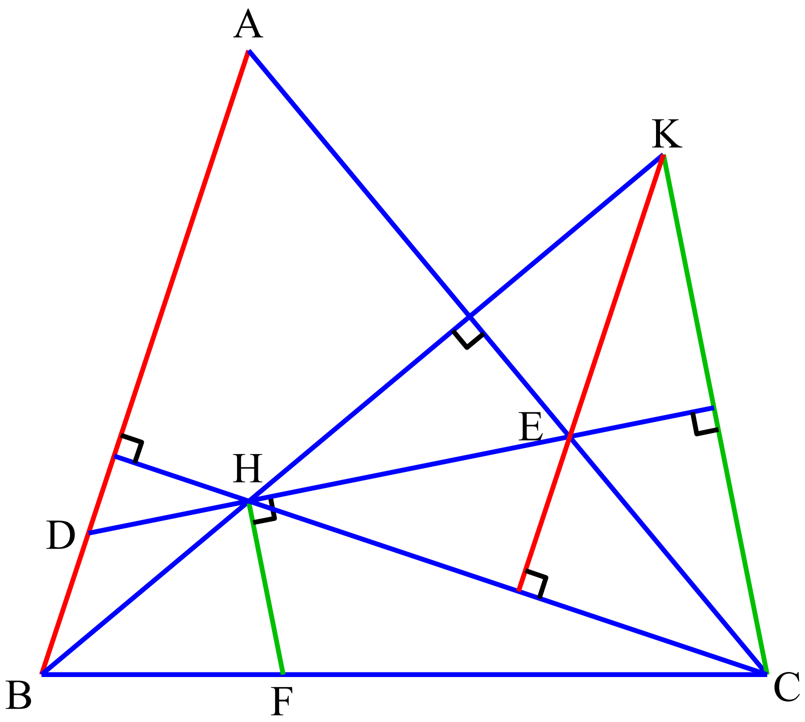
ゆえに，③，④より，KE//AB　すなわち KE//BD

(2)

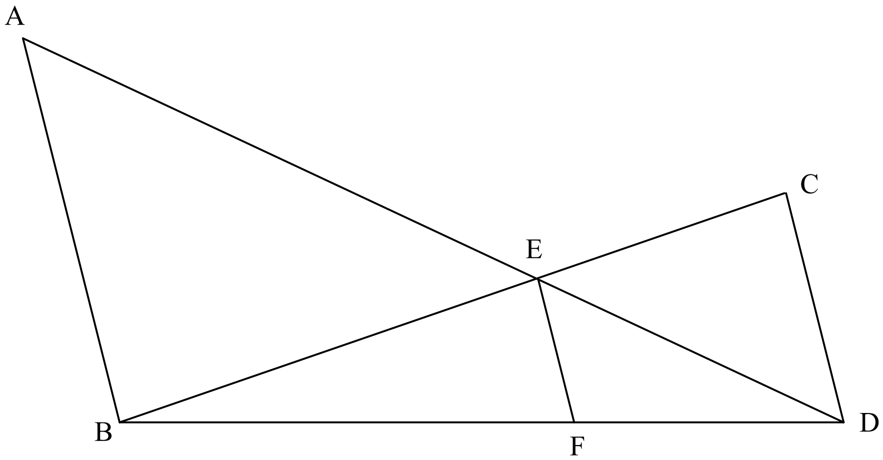
KE//BD より，DH：HE＝BH：HK　・・・⑤

FH//CK より，BH：HK＝BF：FC　・・・⑥

⑤，⑥より，DH：HE＝BF：FC



補足：超有名問題



AB//EF//CD，AB＝p，CD＝q，EF＝x とする。
x を p と q を用いて表わせ。

略解

AB//CD より，△ABE∽DCE

よって，BE：CE＝AB：DC＝p：q

ゆえに，BE：BC＝p：p＋q　・・・①

EF//CD より，△EBF∽△CBD

よって，EF：CD＝BE：BC　すなわち x：q＝BE：BC

これと①より，x：q＝p：p＋q　$\therefore x=\dfrac{pq}{p+q}$

19

$\angle IBC = \alpha$, $\angle ICB = \beta$ とおくと，BI，CI はそれぞれ∠ABC，∠BCA の 2 等分線だから，

$\angle IBA = \angle IBC = \alpha$, $\angle ICA = \angle ICB = \beta$

よって，

$\angle BAC = 180° - (\angle ABC + \angle BCA)$

$\quad = 180° - (2\alpha + 2\beta)$　・・・①

△IBC の外接円において，

弧 BI の中心角と円周角の関係より，$\angle BDI = 2\angle BCI = 2\beta$

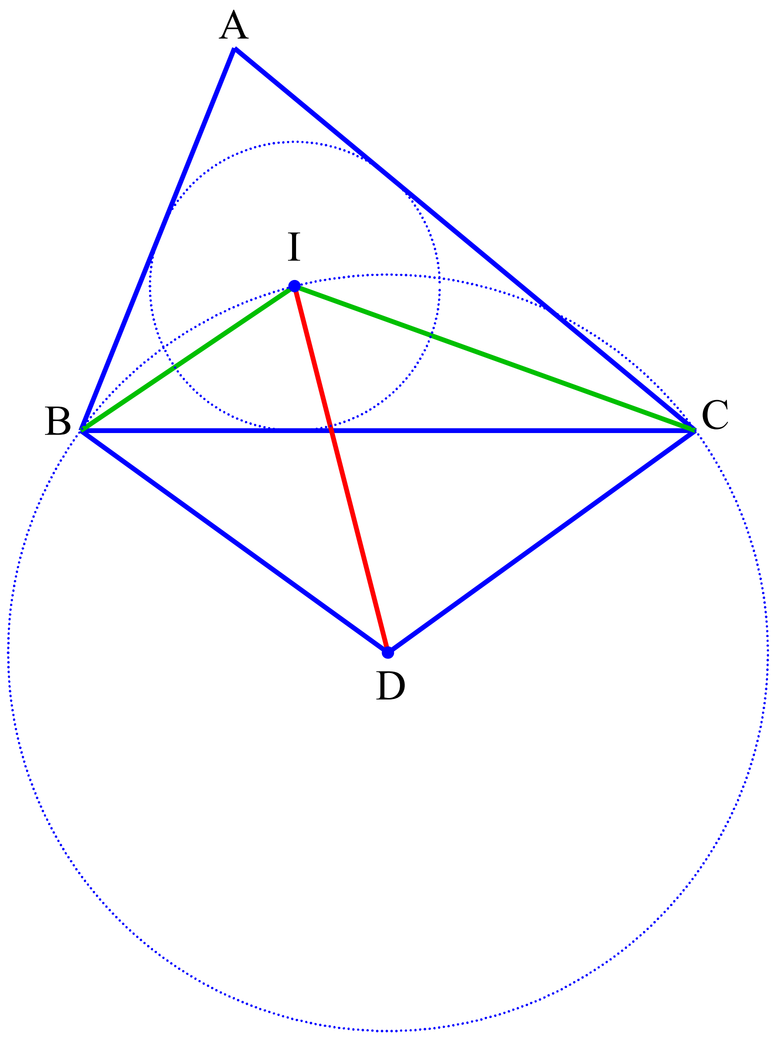
弧 CI の中心角と円周角の関係より，$\angle IDC = 2\angle IBC = 2\alpha$

よって，$\angle BDC = \angle BDI + \angle IDC = 2\beta + 2\alpha$　・・・②

①，②より，$\angle BAC + \angle BDC = 180°$

対角の和が 180° だから，四角形 ABCD は円に内接する。

すなわち，A,B,C,D は 1 つの円周上にある。



20

(1)

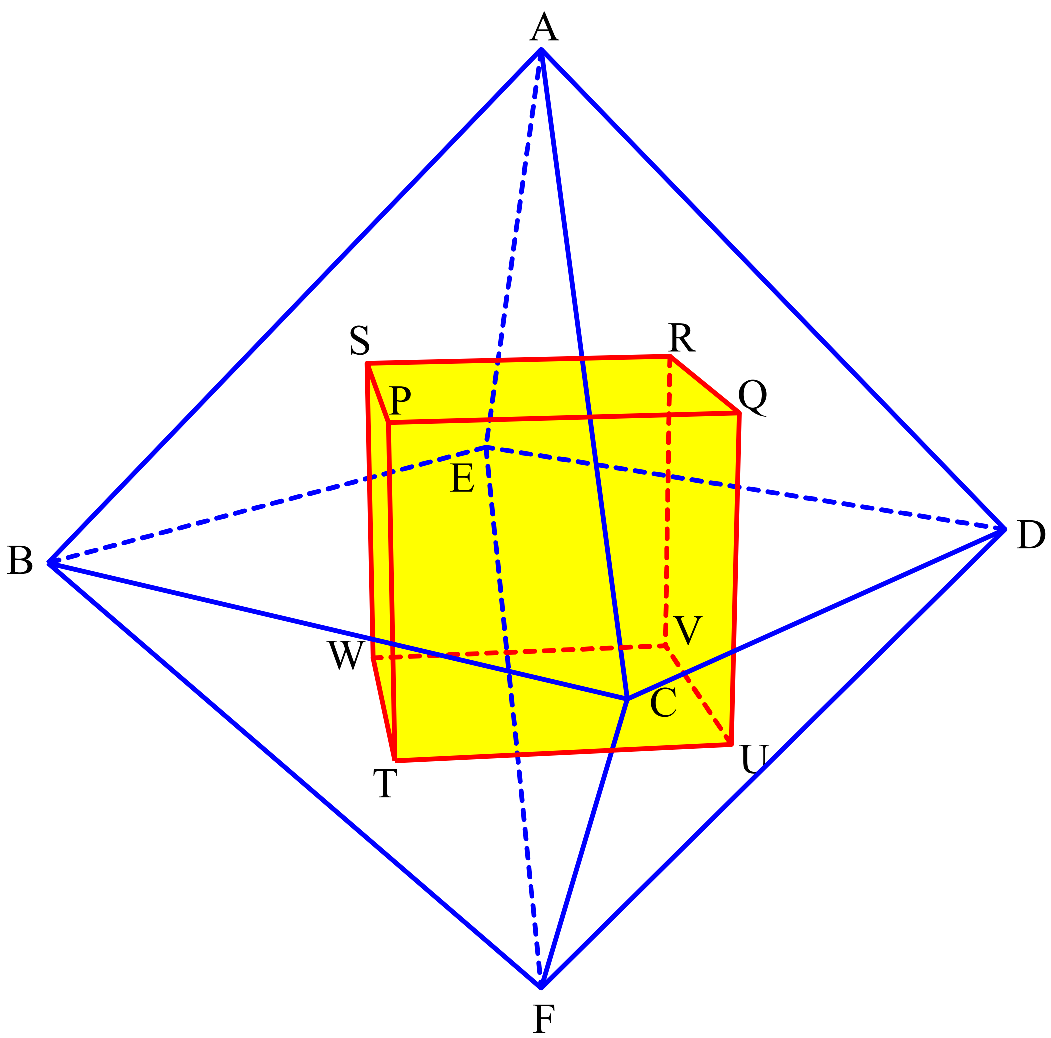
1 辺の長さが $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ の立方体

(2)

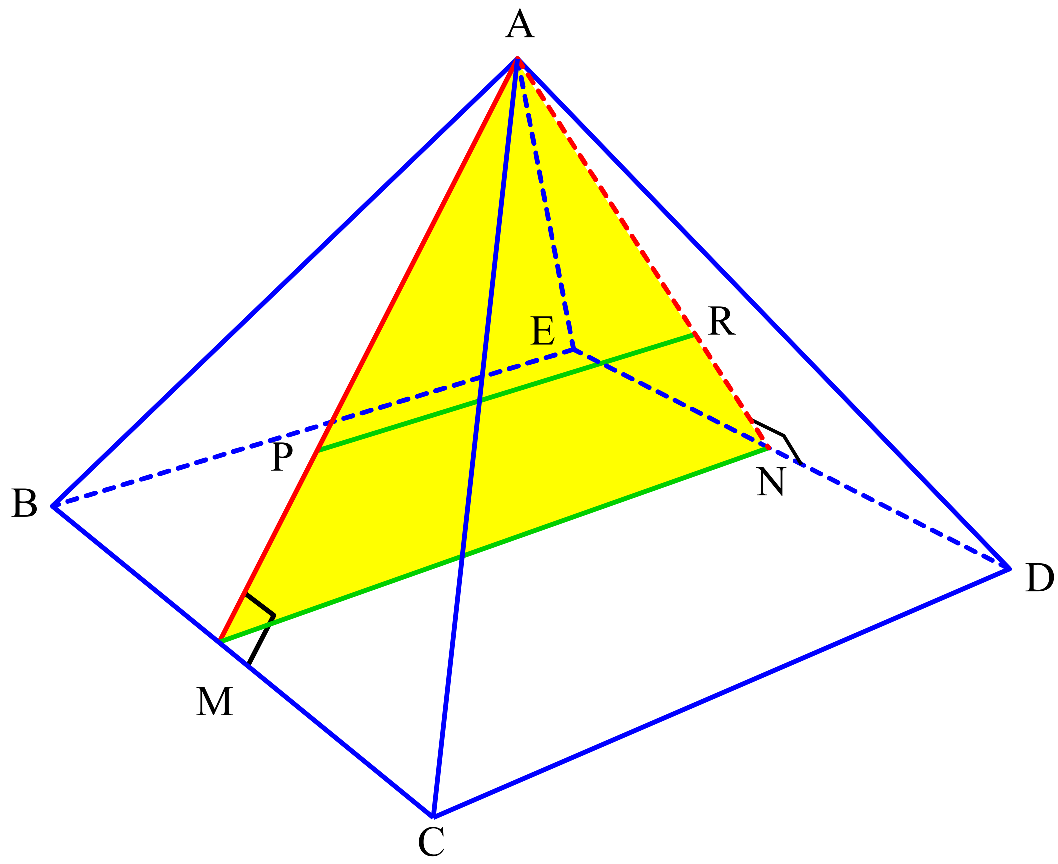
$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)^3=\frac{250\sqrt{2}}{27}$$

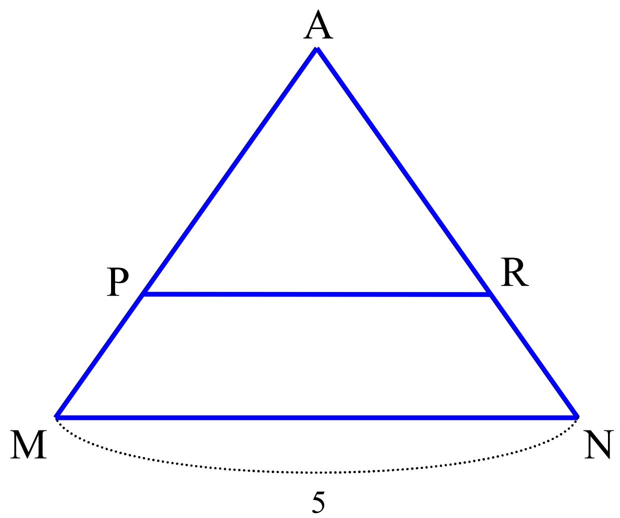
解説

立体の各頂点を下図のように P,Q,R,S,T,U,V,W とする。



まず，正八面体の A を頂点，BCDE を底面とする正四角錐の部分について考える。
条件より，P,Q,R,S は合同な正三角形 ABC,ACD,ADE,AEB のそれぞれの頂点 A からの中線を 2 : 1 に内分する点である。
したがって，正四角錐 ABCDE を平面 APR で切断した断面は下図のようになる。
ただし，M,N はそれぞれ中線 AP,AR と辺 BC,DE の交点である。





M,N はそれぞれ正方形 BCDE の辺 BC,DE の中点だから，
MN は辺 BE の長さすなわち正八面体の 1 辺の長さと等しい。
よって，MN＝5
また，AP：PM＝AR：RN＝2：1 より，△APR と△AMN の相似比は 2：3 だから，

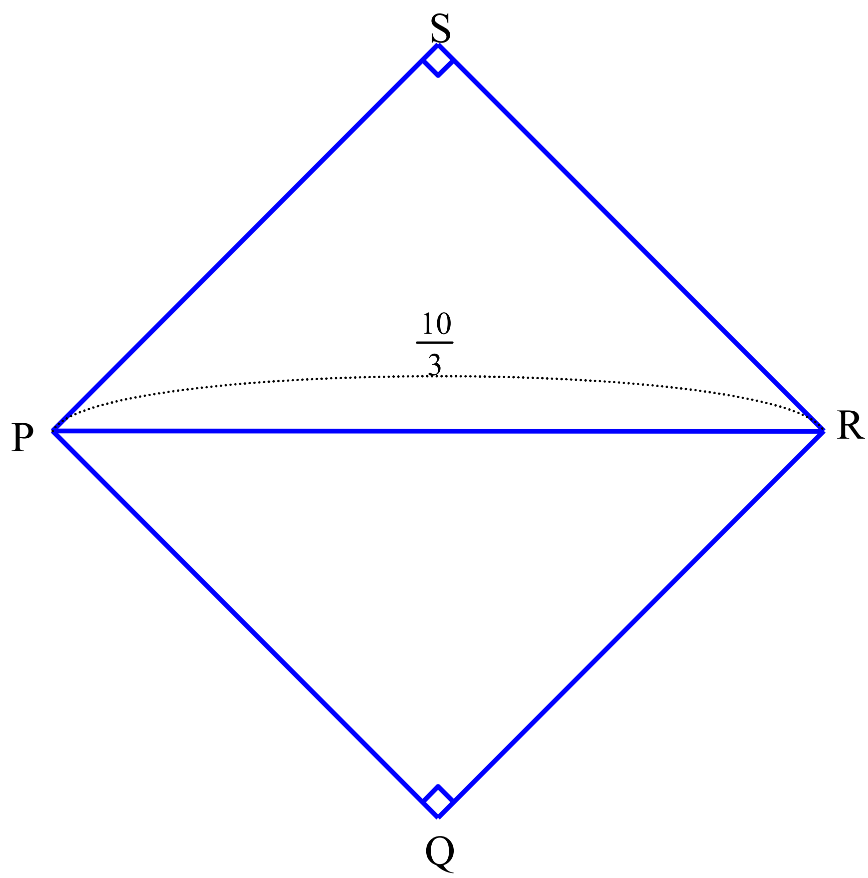
$$\mathrm{PR}=\frac{2}{3}\mathrm{MN}=\frac{10}{3}$$

同様にして，$\mathrm{RS}=\frac{10}{3}$

よって，四角形 PQRS は対角線の長さが等しい。

これと対角線が直交することから，四角形 PQRS は対角線の長さが$\frac{10}{3}$の正方形である。

ゆえに，正方形 PQRS は 1 辺の長さが$\frac{10}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$の正方形である。



正四角錐の部分の頂点を点 A 以外にとって，同様にすると，
立体の各面はすべて正方形 PQRS と合同となる。
よって，立体 PQRSTUVW は立方体である。

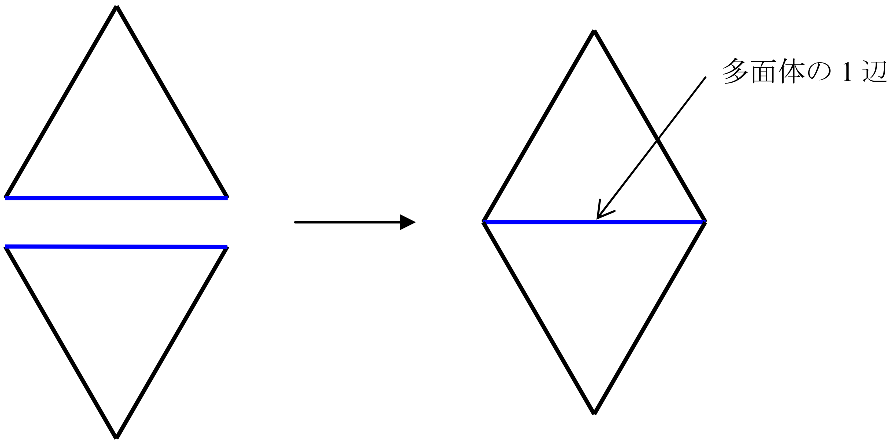
21

(1)

多面体を構成している f 個の三角形の辺の総数は $3f$ である。

これと多面体の 1 辺は 2 つの三角形が 1 辺を共有していることから，$e=\dfrac{3f}{2}$

これをオイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ に代入し，整理すると，$v=\dfrac{1}{2}f+2$



(2)

多面体を構成している e 本の線分の両端の数は $2e$

また，多面体の 1 つの頂点に集まる辺の数を n とすると，

多面体を，それを構成している e 本の線分に分解したとき，その両端の数は nv

よって，$nv=2e$　すなわち $v=\dfrac{2e}{n}$

これと $e=\dfrac{3f}{2}$ より，$v=\dfrac{3f}{n}$

これを $v=\dfrac{1}{2}f+2$ に代入すると，$\dfrac{3f}{n}=\dfrac{1}{2}f+2$

両辺を $2n$ 倍すると，$6f=nf+4n$ より，$(6-n)f=4n$

よって，$f=\dfrac{4n}{6-n}$

ここで，n の値の範囲について，

$f>0$ より，$6-n>0$ これと n は自然数であることから，$1\leq n<5$

また，多面体の 1 つの頂点に少なくとも 3 つの面が集まるから，$n\geq 3$

よって，$3\leq n\leq 5$

ゆえに,

$n=3$ のとき $f=4$　すなわち四面体

$n=4$ のとき $f=8$　すなわち八面体

$n=5$ のとき $f=20$　すなわち二十面体